

ЛЕКЦИЯ 11

§3. Біртекті сызықты жүйелер

3.1. Біртекті сызықты теңдеулер жүйесін қарастырайық:

$$\dot{x} = P(t)x + f(t) \quad (1)$$

Айталық, кейбір $\varphi(t)$ функциясы (1) жүйенің дербес шешімі болсын. Осы жүйеге

$$x = y + \varphi \quad (2)$$

түрінде алмастыру жасайық. Екі жағынан да туынды алып, сол жүйенің өзін пайдалансақ, төмендегідей теңдік аламыз:

$$P(t)(y + \varphi) + f(t) = \dot{y} + \dot{\varphi}$$

Ал бұдан шығатыны

$$\dot{y} = P(t)y \quad (3)$$

Бұл біртекті сызықты жүйе. Осы жүйенің жалпы шешімін тауып, оны (2) қатынастағы y -тің орнына қойсақ, (1) жүйенің жалпы шешімін табамыз.

Қорытындылап айтсақ, біртектісіз жүйенің жалпы шешімі осы жүйенің дербес шешімі мен оның сәйкес біртектісінің жалпы шешімінің қосындысына тең.

Ал біртекті (3) жүйенің жалпы шешімі

$$y = \Phi(t)C \quad (4)$$

түрінде жазылатыны белгілі. Мұндағы, $\Phi(t)$ - (3) жүйенің фундаменталь матрицасы, C - бір бағаналы матрица. Сондықтан, (1) жүйенің жалпы шешімі

$$x = \Phi(t)C + \varphi \quad (5)$$

түрінде жазылады. Бұл шешімнің жалпы шешім болатынын көрсету үшін одан кез келген Коши есебінің шешімін алуға болатынын дәлелдесек, жеткілікті. Ол үшін $t = t_0$ болғанда $x(t_0) = x^0$ болатын шартты қанағаттандыратын векторды табу мүмкіншілігін қарастырайық:

$$x^0 = \Phi(t_0)C + \varphi(t_0) \quad (6)$$

Теңдіктегі $\Phi(t_0)$ фундаменталь матрица болғандықтан, $\langle a, b \rangle$ аралығындағы кез келген нүктеде оның анықтаушы нөлге тең емес, яғни оның кері матрицасы бар. Сондықтан,

$$C = \Phi^{-1}(t_0)(x^0 - \varphi(t_0)) \quad (7)$$

Осы векторды (5) қатынасқа қойып, керекті шешімді аламыз:

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)(x^0 - \varphi(t_0)) + \varphi(t)$$

немесе

$$x(t) = K(t, t_0)(x^0 - \varphi(t_0)) + \varphi(t) \quad (8)$$

Мұндағы, $K(t, t_0) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)$ - Коши функциясы.

3.2. Біртекті сызықты жүйенің жалпы шешімін табу үшін әдетте, тұрақтыларды вариациялау әдісі қолданылады. Мұны Лагранж әдісі деп те атайды. Ол үшін біртекті жүйенің жалпы шешіміндегі тұрақты C векторын t - ға байланысты функция деп, біртекті жүйенің шешімін

$$X(t) = \Phi(t)C(t) \quad (9)$$

түрінде іздейміз. Екі жағынан туынды алып, берілген (1) жүйені пайдаланып, мынандай теңдеу аламыз:

$$\Phi(t)\dot{C}(t) + \dot{\Phi}(t)C(t) = P(t)\Phi(t)C(t) + f(t)$$

Ал

$$\dot{\Phi}(t) = P(t)\Phi(t) \quad (10)$$

тепе-теңдігін ескерсек, онда

$$\Phi(t)\dot{C}(t) = f(t)$$

Осыдан

$$\dot{C}(t) = \Phi^{-1}(t)f(t) \quad (11)$$

Бұл теңдеудің шешімі интегралдау арқылы былай жазылады:

$$C(t) = C^0 + \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \quad (12)$$

мұндағы, $C^0 = C(t_0) = \text{colon}(C_1^0, \dots, C_n^0)$ - тұрақты вектор. Табылған $C(t)$ - ның мәнін (9) - қатынасқа қойып, біртекті (1) жүйенің жалпы шешімін табамыз:

$$x(t) = \Phi(t)C^0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \quad (13)$$

Бұл жалпы шешімдегі тұрақты C^0 - векторын анықтау үшін формулада $t = t_0$ деп алсақ, онда $C^0 = \Phi^{-1}(t_0)x^0$. Сондықтан

$$x(t) = \Phi(t)\Phi^{-1}(t_0)x^0 + \int_{t_0}^t \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)f(\tau)d\tau \quad (14)$$

немесе Коши функциясын енгізсек, онда шешім мына түрде жазылады:

$$x(t) = K(t, t_0)x^0 + \int_{t_0}^t K(t, \tau)f(\tau)d\tau \quad (15)$$

Бұл қатынас Коши формуласы деп аталынады. Осындағы фундаменталь $\Phi(t)$ матрицасы $t = t_0$ нүктесінде нормаланған болса, яғни $\Phi(t_0) = E$ болса, онда формула мына түрде жазылады:

$$x(t) = \Phi(t)x^0 + \int_{t_0}^t K(t, \tau)f(\tau)d\tau$$

Егер $P(t)$ матрицасы тұрақты болса, яғни $P(t) = A$ - тұрақты болса және $\Phi(t_0) = E$ болса, онда $\Phi(t) = e^{A(t-t_0)}$. Бұл жағдайда жалпы шешім мына түрде жазылады:

$$x(t) = e^{A(t-t_0)} x^0 + \int_{t_0}^t e^{A(t-\tau)} f(\tau) d\tau \quad (16)$$

Соңғы формулада t_0 - тұрақталған сан деп, ал x^0 - векторын кез келген тұрақты вектор деп қарастырсақ, онда (16) формула Коши түріндегі жалпы шешімді білдіреді.

3.3. Тұрақты сандарды вариациялаудың екінші түрін келтірейік.

Біртекті жүйенің жалпы және дербес шешімін іздегенде $\bar{C}(t)$ векторын координаттары бойынша іздеген қолайлы. Олардың туындылары сызықты алгебралық жүйенің шешімдері ретінде анықталады.

Айталық, $\varphi^1(t), \dots, \varphi^n(t)$ вектор - функциялары (3) жүйенің фундаменталь шешімдер жүйесі болсын. Онда осы жүйенің жалпы шешімі

$$y = \sum_{i=1}^n C_i \varphi^i(t)$$

түрінде жазылады. Мұндағы, C_i - еркін тұрақтылар. Енді (1) жүйенің жалпы шешімін табу үшін осы C_i - лерді t - ға байланысты үздіксіз дифференциалданатын белгісіз функциялар деп есептейік, яғни

$$y = \sum_{i=1}^n C_i(t) \phi^i(t) \quad (17)$$

Егер осы вектор-функцияны (1) жүйеге қойсақ, белгісіз $C_i(t)$ және оның туындысы $\dot{C}_i(t)$ бойынша төмендегідей векторлық теңдеу алынады:

$$\sum_{i=1}^n \dot{C}_i(t) \varphi^i(t) + \sum_{i=1}^n C_i(t) \dot{\varphi}^i(t) = P(t) \sum_{i=1}^n C_i(t) \varphi^i(t) + f(t)$$

Осыдан, $\dot{\varphi}^i(t) = P(t)\varphi^i(t)$ екенін ескерсек,

$$\sum_{i=1}^n \dot{C}_i(t) \phi^i(t) = f(t) \quad (18)$$

түріндегі векторлық теңдеу аламыз. Оны координаттары бойынша ашып жазсақ, төмендегідей n скалярлық теңдеулер жүйесін аламыз:

[illegible]

Бұл жүйе алгебралық сызықты біртекті жүйе. Ал оның негізгі анықтаушы Вронский анықтаушы болғандықтан, ол нөлге тең емес. Крамер ережесі бойынша барлық $\dot{C}_i(t)$ функциялары бір мәнді болып анықталады:

$$\dot{C}_i(t) = \frac{W_i(t)}{W(t)} = g_i(t), (i=1, \dots, n) \quad (20)$$

Осыдан

$$C_i(t) = C_i^0 + \int g_i(t) dt, (i = 1, \dots, n) \quad (21)$$

Бұл функцияларды (17) қатынасқа қойсақ,

$$y = \sum_{i=1}^n C_i^0 \phi^i(t) + \sum_{i=1}^n \phi^i(t) \int g_i(t) dt \quad (22)$$

түріндегі (1) жүйенің жалпы шешімін аламыз. Мұндағы, бірінші қосынды біртекті (3) жүйенің жалпы шешімін береді де, екінші қосынды (1) жүйенің дербес шешімін береді. Сонымен, бастапқы тұжырымға қайта келдік: біртекті сызықты жүйенің жалпы шешімі сәйкес біртекті жүйенің жалпы шешімі мен біртекті жүйенің дербес шешімінің қосындысынан тұрады.

§4. Тұрақты коэффициентті сызықты жүйелерді интегралдау

4.1. Коэффициенттері тұрақты біртекті сызықты жүйені қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (1)$$

Мұнда $x = colon(x_1, \dots, x_n)$, $A = (a_{ij})$ - тұрақты нақты квадрат матрица.

Бұл жүйенің шешімін Эйлер әдісі бойынша

$$x = \alpha e^{\lambda t} \quad (2)$$

түрінде іздейміз. Мұнда λ - белгісіз сан, α - нөлдік емес белгісіз тұрақты вектор.

Осы (2) өрнекті (1) жүйеге қойсақ,

$$(A - \lambda E)\alpha = 0 \quad (3)$$

түріндегі векторлық алгебралық теңдеу аламыз. Бұл теңдеуді ашып жазсақ,

$$\left. \begin{array}{l} (a_{11}-\lambda)\alpha_1+a_{12}\alpha_2+...+a_{1n}\alpha_n=0 \\ a_{21}\alpha_1+(a_{22}-\lambda)\alpha_2+...+a_{2n}\alpha_n=0 \\ \\ a_{n1}\alpha_1+a_{n2}\alpha_2+...+(a_{nn}-\lambda)\alpha_n=0 \end{array} \right\} \quad (4)$$

түріндегі сызықты тендеулер жүйесін аламыз. Жүйенің нөлдік емес шешімі бар болуы үшін оның анықтауышы нөлге тең болуы керек:

$$|A - \lambda E| = 0 \quad (5)$$

Hemece

$$\begin{vmatrix} (a_{11} - \lambda) & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & (a_{22} - \lambda) & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & (a_{nn} - \lambda) \end{vmatrix} = 0 \quad (6)$$

Осы теңдеу берілген жүйенің сипаттаушы теңдеуі деп аталады. Оның түбірлері A матрицасының меншікті сандары (мәндері), ал әрбір меншікті санға сәйкес α векторын A матрицасының меншікті векторы деп атайды.

Меншікті сандардың түрлеріне байланысты фундаменталь матрица әртүрлі болады. Сол жағдайларды қарастырайық.

1⁰. Айталық, меншікті сандар әртүрлі нақты сандар болсын: $\lambda_1, \dots, \lambda_n$. Осындағы белгілі бір λ_i меншікті санына сәйкес α_i векторының координаттары (4) жүйеден табылады. Ол үшін λ -ның орнына λ_i -ді қою керек. Егер $x_i = \text{colon}(x_{1i}, \dots, x_{ni})$, ал $\alpha_i = \text{colon}(\alpha_{1i}, \dots, \alpha_{ni})$ деп алсақ, онда λ_i -ге сәйкес шешім

$$x_{1i}(t) = \alpha_{1i} e^{\lambda_i t}, \dots, x_{ni}(t) = \alpha_{ni} e^{\lambda_i t} \quad (7)$$

түрінде жазылады. Сондықтан, бұл жағдайда фундаменталь матрица былай жазылады:

$$\Phi(t) = \begin{pmatrix} x_{11} & \dots & x_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ x_{n1} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix} \quad (8)$$

Бұл матрицаның анықтаушы нөлге тең емес, өйткені оның әрбір бағанасы өзара тәуелсіз. Сондықтан, жалпы шешім

$$x(t) = C_1 \alpha_1 e^{\lambda_1 t} + \dots + C_n \alpha_n e^{\lambda_n t} \quad (9)$$

түрінде жазылады немесе матрица түрінде

$$x(t) = \Phi(t) C \quad (10)$$

Мұндағы, C - бір бағаналы тұрақты матрица.

2⁰. Айталық, $\lambda_1 = a + ib$ - сипаттаушы теңдеудің жәй түбірі болсын. Онда оның түйіндесі $\bar{\lambda}_1 = a - ib$ саны да сол теңдеудің түбірі болады. Бұл жағдайда сәйкес шешім

$$x_1(t) = (\gamma_{11} + i\gamma_{12}) e^{(a+ib)t} \quad (11)$$

түрінде жазылады. Соңғы қатынастың нақты және жорамал бөліктерін ажыратайық:

$$\begin{aligned} x_1(t) &= (\gamma_{11} + i\gamma_{12}) e^{at} (\cos bt + i \sin bt) = \\ &= e^{at} (\gamma_{11} \cos bt - \gamma_{12} \sin bt) + i e^{at} (\gamma_{12} \cos bt + \gamma_{11} \sin bt) \end{aligned}$$

Жүйенің коэффициенттері нақты болғандықтан, комплекс шешімнің нақты және жорамал бөліктері өз алдарына нақты шешімдер болып табылады. Сондықтан,

$$\begin{aligned} x_{11}(t) &= \text{Re } x_1(t) = e^{at} (\gamma_{11} \cos bt - \gamma_{12} \sin bt) \\ x_{12}(t) &= \text{Im } x_1(t) = e^{at} (\gamma_{12} \cos bt + \gamma_{11} \sin bt) \end{aligned} \quad (12)$$

функциялары берілген жүйенің нақты шешімдері болады. Бұл шешімдер өзара сызықты тәуелсіз. Түйіндес $a - ib$ түбірі жаңа тәуелсіз шешімдер тудырмайды. Демек, бір пар комплексті түбірге өзара тәуелсіз екі нақты шешім сәйкес келеді. Олар өзара сызықты тәуелсіз болғандықтан, фундаменталь шешімдер жүйесіне кіреді. Осы сияқты, барлық түбірлер үшін нақты шешімдерді құрып шығуға болады. Олардың сызықты комбинациясы жүйенің жалпы шешімін береді.

3⁰. Сипаттаушы теңдеудің түбірлерінің кейбіреулері еселікті түбірлер болатын жағдайды қарастырайық.

Айталық, λ_1 -саны k - еселікті түбір болсын. Бұл түбірге бір немесе бірнеше меншікті векторлар сәйкес келуі мүмкін. Олардың саны жалпы алғанда k -дан аспайды. Сондықтан,

Айталық, $x(t)$ векторы (1) жүйенің шешімі болсын.

$$a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n - Dx_i = 0, (i = 1, \dots, n) \quad (13)$$

Құрылған (13) қатынасты $|A - ED|$ анықтаушының алгебралық толықтауышы $A_{ij}(D)$ -ға көбейтіп, i -индексі бойынша қосындыласақ,

$$M(D)x_i = 0, (i = 1, \dots, n) \quad (14)$$

$$x_i(t) = (C_{1i} + C_{2i}t + \dots + C_{ki}t^{k-1})e^{\lambda_1 t}$$
$$x(t) = \begin{pmatrix} C_{11}t + C_{21}t^2 + \dots + C_{k1}t^{k-1} \\ \vdots \\ C_{1n}t + C_{2n}t^2 + \dots + C_{kn}t^{k-1} \end{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \quad (15)$$
$$x(t)=[C_1 p_1(t)+...+C_k p_k(t)]e^{\lambda_1 t} \quad (16)$$

Сонымен, сипаттаушы тендеудің k еселікті λ_1 түбіріне $p_i(t)e^{\lambda_1 t}$ түріндегі шешім сәйкес қойылды. Осы сияқты кез келген k_s еселікті λ_s түбіріне де сәйкес шешім құрып шығуға болады. Олардың жиыны берілген жүйенің фундаменталь шешімдер жүйесі болатынын көрсету үшін вронскианның $t=0$ нүктесінде нөлге айналмайтынын көрсетсе, жеткілікті (дәлірек, дәлелдеуді [5] оқу құралынан көруге болады).

4.2. Турақты коэффициентті біртектісіз жүйені қарастырайық:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + f(t) \quad (17)$$

Мұнда $x = \text{colon}(x_1, \dots, x_n)$, $f(t) = \text{colon}(f_1, \dots, f_n)$, $A = (a_{ij})$ - квадрат матрица. Оның сәйкес біртектісі:

$$\frac{dx}{dt} = Ax \quad (18)$$

жүйесінің жалпы шешімі элементар функциялар арқылы өрнектелетіні өткен пунктте көрсетілді. Жалпы жағдайда біртектісіз жүйенің жалпы шешімі тұрақтыларды вариациялау арқылы оңай табылады.

Егер (17) жүйедегі $f(t)$ вектор-функция квазикөпмүшелік түрінде берілсе, онда жүйенің дербес шешімін анықталмаған коэффициенттер әдісін қолданып табуға болады. Табылған дербес шешімді біртекті жүйенің жалпы шешімімен қоссақ, берілген (17) жүйенің жалпы шешімін аламыз.

Айталық, біртектісіз жүйе төмендегідей түрде берілсін:

$$\frac{dx}{dt} = Ax + P_m(t)e^{\alpha t} \quad (19)$$

Мұндағы, $P_m(t)$ - дәрежесі m -нен аспайтын көпмүшелікті вектор, яғни

$$P_m(t) = \sum_{k=0}^m p_k t^k, \quad (20)$$

мұндағы p_k - тұрақты векторлар.

Бұл жерде екі жағдай қарастырылады.

1⁰. Резонанс емес жағдай: α саны A матрицасының меншікті саны емес. Бұл жағдайда дербес шешім

$$x(t) = Q_m(t)e^{\alpha t} \quad (21)$$

түрінде ізделінеді. Мұнда $Q_m(t)$ - вектор:

$$Q_m(t) = \sum_{k=0}^m q_k t^k \quad (22)$$

мұнда q_k - белгісіз тұрақты вектор.

Осы өрнекті (19) теңдікке қойып, t -ның әртүрлі дәрежелерінің алдындағы коэффициенттерін теңестіреміз:

$$(\alpha E - A)Q_m(t) = P_m(t) - \frac{dQ_m(t)}{dt} \quad (23)$$

Осыдан

$$\left. \begin{aligned} (\alpha E - A)q_m &= p_m, \\ (\alpha E - A)q_{m-1} &= p_{m-1} - mq_m, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned} \right\} \quad (24)$$

Мұнда $\alpha E - A$ матрицасы ерекше емес. Сондықтан, (24) жүйеден сатылап барлық q_m векторларын бірімәндес түрде анықтауға болады:

$$q_m = (\alpha E - A)^{-1} p_m \quad (25)$$

екінші теңдеуден q_{m-1} векторын, осылай барлық векторларды табамыз.

2⁰. Резонанс жағдай: α саны A матрицасының меншікті саны. Бұл жағдайда дербес шешім

$$x(t) = Q_{m+1}(t)e^{\alpha t} \quad (26)$$

түрінде ізделінеді. Мұнда $Q_{m+1}(t)$ - вектор-функция, оның әрбір компоненті дәрежесі $m+1$ -ден аспайтын көпмүшелік.

Егер α саны A матрицасының еселікті меншікті саны болса, онда $Q(t)$ векторының компоненттерінің t бойынша дәрежелері сәйкес еселік көрсеткішіне өседі (толық дәлелдеуін [4] оқу құралынан көруге болады).